Exercice 4

On considère une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on suppose que X est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Justifier rapidement l'existence de $\mathbb{E}(X)$.
2. Montrer que si X est à valeurs finies

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$$

3. Montrer que $X = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{X \geq n}$. En déduire que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$$

4. En déduire $\mathbb{E}(X)$ où [illegible] $p \in]0,1[$ tel que X [illegible]

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

M dénombrable ssi

$\exists$ bijection $f : \mathbb{N} \to M$

<u>Exemple</u> : $\mathbb{Z}$ dénombrable

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned}
1 &\mapsto 0 \\
2 &\mapsto 1 \\
3 &\mapsto -1 \\
4 &\mapsto 2 \\
5 &\mapsto -2
\end{aligned}$$

$$n \longmapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ pair} \\ -\frac{n-1}{2} & n \text{ impair} \end{cases}$$

$\mathbb{N} \cup \{a\}$ dénombrable ?

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{+a\}$$

$$\begin{aligned}
1 &\mapsto a \\
2 &\mapsto 1 \\
3 &\mapsto 2 \\
4 &\mapsto 3 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

hôtel avec nombre infini de chambre

nombre infini de bus arrive avec chacun un nombre infini des passagers

A_i est dénombrable $\forall i \in \mathbb{N}$

$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ dénombrable

$A_1 = \{a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, a_4^{(1)}, a_5^{(1)}, \ldots$ $A_2 = \{a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, a_3^{(2)}, a_4^{2}, a_5^{2}, \}$ $A_3 = \{a_1^{(3)}, a_2^{(3)}, a_3^{(3)}, a_4^{3}, a_5^{3}$ $A_4 = \{a_1^4, a_2^4, a_3^4, a_4^4,$

$$f : \mathbb{N} \to \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

$$\begin{aligned}
1 &\longmapsto a_1^{(1)} \\
2 &\longmapsto a_2^{(1)} \\
3 &\longmapsto a_1^{(2)} \\
4 &\longmapsto a_2^{(2)} \\
& \quad a_3^1 \\
& \quad a_3^2 \\
& \quad a_1^3 \\
& \quad a_2^3 \\
& \quad a_3^3
\end{aligned}$$

$\{a_1, a_2, \ldots\}$

$A = \{1, 2, 3\}$ $A \times B = \{(1,4), (2,4), (3,$

a_1
a_2^3
a_3^3

$\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$
$\overset{\shortparallel}{A}, \underset{\shortparallel\{b_1,b_2,b_3,\dots\}}{B}$ dénombrable

$A \times B$ dénombrable ?

$A = \{1,2,3\}$ $\quad A \times B = \{(1,4), (2,4), (3,4), (1,5), (2,5), (3,5)\}$
$B = \{4,5\}$

$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$

$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{N} &\to A \times B \\
1 &\mapsto (a_1, b_1) \\
2 &\mapsto (a_2, b_1) \\
3 &\mapsto (a_1, b_2) \\
4 &\mapsto (a_2, b_2) \\
5 &\mapsto (a_3, b_1) \\
6 &\mapsto (a_1, b_3) \\
7 &\mapsto (a_2, b_3) \\
8 &\mapsto (a_3, b_2) \\
9 &\mapsto (a_4, b_1) \\
10 &\mapsto (a_1, b_4)
\end{aligned}
$$

$(a_1, b_2) \notin f(\mathbb{N})$

$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \cup \{a, b, c\} \\
1 &\mapsto a \\
2 &\mapsto b \\
3 &\mapsto c \\
4 &\mapsto 1 \\
5 &\mapsto 2 \\
6 &\mapsto 3 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \cup \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\} \\
1 &\mapsto a_1 \\
2 &\mapsto 1 \\
3 &\mapsto a_2 \\
4 &\mapsto 2 \\
5 &\mapsto a_3
\end{aligned}
$$

$$
n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ pair} \\ a_{\boxed{\frac{n+1}{2}}} & n \text{ impair} \end{cases}
$$

$\mathcal{F} = \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \}$

Montrer que $\mathcal{F}$ n'est pas dénombrable !

$f(n) = n^2 \in \mathcal{F}$

$f(n) = 2n+1 \in \mathcal{F}$

$f(n) = n^4 + 5n^3 + 100 \in \mathcal{F}$

$\vdots$

$f(n) = n^4 + 5n^3 + 100\ldots$

$\vdots$

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{A \mid A \subseteq \mathbb{N}\}$$

Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable !

Démonstr.

$\{1,2,3\} \subseteq \mathbb{N}$

$\{4\} \in \mathbb{N}$

$\{100, 1\} \in \mathbb{N}$

$\vdots$

Supposons que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ soit dénombrable, ça veut dire nous trouvons une bijection

$$f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{\overset{f(1)}{A_1}, A_2, A_3, A_4, A_5, \ldots\}$$

$$B_1 = \left.\begin{matrix} \{1\} & \text{si } 1 \notin A_1 \\ \{\} & \text{si } 1 \in A_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow B \neq A_1$$

$$B_2 = B_1 \cup \begin{cases} \{2\} & \text{si } 2 \notin A_2 \\ \{\} & \text{si } 2 \in A_2 \end{cases} \Rightarrow B \neq A_2$$

$$B_3 = B_2 \cup \begin{cases} \{3\} & \text{si } 3 \notin A_3 \\ \emptyset & \text{si } 3 \in A_3 \end{cases} \Rightarrow B \neq A_3$$

$$B_4 = B_3 \cup \begin{cases} \{4\} & \text{si } 4 \notin A_4 \\ \emptyset & \text{si } 4 \in A_4 \end{cases}$$

$$B := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

$$B \notin \{A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots\}$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) \neq \{A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots\}$$

Contradiction !

$$\mathcal{F} = \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \}$$

Montrer que $\mathcal{F}$ n'est pas dénombrable !

$$f(n) = n^2 \in \mathcal{F}$$
$$f(n) = 2n+1 \in \mathcal{F}$$
$$f(n) = n^4 + 5n^3 + 100 \in \mathcal{F}$$

Démonstration :

Supposons que $\mathcal{F}$ soit dénombrable, ça veut dire

$$\mathcal{F} = \{ f_1, f_2, f_3, f_4, \dots \}$$

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$1 \longmapsto f_1(1) + 100 \Rightarrow f \neq f_1$, parce que $f(1) \neq f_1(1)$

$2 \longmapsto f_2(2) + 100 \Rightarrow f \neq f_2$, parce que $f(2) \neq f_2(2)$

$3 \longmapsto f_3(3) + 100$

$n \longmapsto f_n(n) + 100$

Ensembles dénombrables

Exercice 1 Dénombrables?

Les ensembles suivants sont-ils dénombrables?

4. L'ensemble des nombres premiers.
5. L'ensemble des fonctions de N dans N.

$$f \neq f_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$f \in \mathcal{F}$ mais $f \notin \{ f_1, f_2, f_3, \dots \}$

$$\Rightarrow \mathcal{F} \neq \{ f_1, f_2, f_3, \dots \}$$

Contradiction !

Exercice :

Contradiction !

Exercice :

Montrer que $[0,1]$ n'est pas dénombrable !

Démonstration :

Supposons que $[0,1]$ soit dénombrable, ça veut dire $[0,1] = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\}$

$$a_1 = 0{,}r_1^1 r_2^1 r_3^1 r_4^1 r_5^1 \dots$$
$$a_2 = 0{,}r_1^2 r_2^2 r_3^2 r_4^2 r_5^2 \dots$$
$$a_3 = 0{,}r_1^3 r_2^3 r_3^3 r_4^3 r_5^3 \dots$$

$$a = 0{,}c_1 c_2 c_3$$

$$c_1 = \begin{cases} 0 & \text{si } r_1^1 \in \{5,6,7,8,9\} \\ 8 & \text{si } r_1^1 \in \{0,1,2,3,4\} \end{cases} \Rightarrow a \neq a_1$$

$$c_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } r_2^2 \in \{5,\dots,9\} \\ 6 & \text{si } r_2 \in \{0,1,\dots,4\} \end{cases} \Rightarrow a \neq a_2$$

$$c_3 = \begin{cases} 0 & \text{si } r_3^3 \in \{5,\dots,9\} \\ 5 & \text{si } r_3^3 \in \{1,\dots,4\} \end{cases} \Rightarrow a \neq a_3$$

$\vdots$

$\Rightarrow a \notin \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$

$a \in [0,1]$

$\Rightarrow [0,1] \neq \{a_1, a_2, a_3, \dots$

$\Rightarrow [0,1]$